Total No. of Questions : 8] *[Total No. of Printed Pages : 6*

Roll No ....

BT-102 (GS)

B.Tech., I & II Semester

Examination, June 2023

Grading System (GS)

Mathematics-I

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Attempt any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) State Rolle's theorem hence verify for $f(x) = x^2 + 2x$ defined in the interval [–2, 0].

रोल के प्रमेय का विवरण दें इसलिए अंतराल [–2, 0] में परिभाषित $f(x) = x^2 + 2x$ के लिए सत्यापित करें।

b) Find the first six terms of the expansions of the function $e^x \log(1+y)$ in a Taylor series in the neighbourhood of the point (0, 0).

बिंदु (0, 0) के पड़ोस में टेलर श्रृंखला में फलन $e^x \log(1+y)$ के विस्तार के पहले छह पद खोजें।

2. a) The temperature $u(x, y, z)$ at any point in space is $u = 400xyz^2$ find the highest temperature on surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

अंतरिक्ष में किसी भी बिंदु पर तापमान $u(x, y, z)$ है $u = 400xyz^2$ क्षेत्र $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ की सतह पर उच्चतम तापमान पाएं।

b) If $u = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y}$, find the value of $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

यदि $u = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y}$ तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. a) Find shortest distance from the origin to the curve $x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$

मूल से वक्र $x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ तक की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

b) Find $\frac{du}{dt}$ if $u = x^2 + y^2$, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

$\frac{du}{dt}$ खोजें अगर $u = x^2 + y^2$, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

4. a) Change the order of integration in $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy \, dy \, dx$ and hence evaluate.

$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy \, dy \, dx$ में एकीकरण के क्रम को बदलें और इसलिए मूल्यांकन करें।

b) Evaluate $\iint e^{2x+3y} dxdy$ over the triangle bounded by $x = 0, y = 0$ and $x + y = 1$.

$x = 0, y = 0$ और $x + y = 1$ से घिरे त्रिकोण पर $\iint e^{2x+3y} dxdy$ का मूल्यांकन करें।

5. a) Test the convergence of the series

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

श्रृंखला के अभिसरण का परीक्षण करें।

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

b) Expand as a half range $f(x) = x$ sine series and cosine series for the interval $0 < x < 2$.

अंतराल $0 < x < 2$ के लिए $f(x) = x$ ज्या श्रृंखला और कोज्या श्रृंखला के रूप में विस्तृत करें।

6. a) Expand $f(x) = x\sin x$, $0 < x < 2\pi$ as a Fourier series.

फूरियर श्रृंखला के रूप में $f(x) = x\sin x$, $0 < x < 2\pi$ का विस्तार करें।

b) Find the a_0 and a_n if the function $f(x) = x + x^2$ is expanded in Fourier series defined in $(-1, 1)$.

a_0 और a_n खोजें यदि फलन $f(x) = x + x^2$ को $(-1, 1)$ में परिभाषित फूरियर श्रृंखला में विस्तारित किया गया है।

7. a) i) If A is a skew symmetric matrix then show that A^2 is a symmetric matrix.

यदि A एक विषम सममित आव्यूह है, तो दिखाइए कि A^2 एक सममित आव्यूह है।

ii) Find eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात कीजिए।

b) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using elementary row transformations.

प्रारंभिक पंक्ति परिवर्तनों का उपयोग करके $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करें।

8. a) Verify Cayley Hamilton theorem for the matrix A and hence find A^{-1} for $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

आव्यूह A के लिए केली हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करें और इसलिए $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए A^{-1} खोजें।

b) Test the consistency and hence, solve the following set of equations.

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - y + 2z = 1$$
$$2x - 2y + 3z = 2$$
$$x - y + z = -1$$

निरंतरता का परीक्षण करें और इसलिए, समीकरणों के निम्नलिखित निकाय को हल करें।

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - y + 2z = 1$$
$$2x - 2y + 3z = 2$$
$$x - y + z = -1$$

******